

ANÁLISE DE *CLUSTERS*: TÉCNICA DE AGRUPAMENTO, ARTE DE INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS

*Paulo Castro Ribeiro **

1. INTRODUÇÃO

São inúmeros os exemplos que podemos encontrar, na história do pensamento humano, sobre as formas de abordar o real tendo em vista a sua compreensão.

Alguns dos esforços mais profícuos surgem-nos na antiga Grécia. Entre outros, gostaríamos de salientar o contributo dado por Aristóteles na formulação da chamada Teoria da Abstracção, segundo a qual seria possível a formulação de **conceitos**. Aristóteles propõe-nos a utilização de uma faculdade da razão (a abstracção), como forma de separar o essencial do acessório, tendo em vista a formulação dos **conceitos**. É desta forma que concebemos árvore independentemente da sua espécie, cadeira independentemente da sua forma.

A formulação dos conceitos assenta em dois momentos distintos. O primeiro traduz-se no contacto com a diversidade do real através dos sentidos; o segundo naquela capacidade, própria dos seres racionais, que lhes permite reter e classificar o essencial como forma de o organizar.

Outro tipo de formulação é aquele que nos surge quando rotulamos um método científico de indutivo, dedutivo ou indutivo-dedutivo e vice-versa. Aqui dizemos que as etapas do método se encadeiam segundo uma ordem pré-determinada e bem estabelecida, fazendo a análise de um fenómeno do particular para o geral (método indutivo) ou do geral para o particular (método dedutivo).

Quer se trate duma ou doutra situação surge-nos sempre, em algum momento da investigação, a necessidade de agrupar e/ou classificar os indivíduos¹ em análise que, no seu todo ou em parte, sustentarão as nossas conclusões.

Outras situações há em que a classificação ou agrupamento dos indivíduos é o próprio objectivo da pesquisa. Encontramos esta situação, por exemplo, na Taxinomia Numérica (Biologia), na Medicina, que utiliza técnicas de classificação para identificar tipologias de doenças e os seus diferentes estágios (o exame de vários

* Instituto Universitário de Desenvolvimento e Promoção Social — Pólo de Viseu da Universidade Católica Portuguesa.

pacientes diagnosticados como depressivos permite-nos, numa análise mais aprofundada, verificar a existência de vários subgrupos de indivíduos com diferentes tipos de depressão), nos estudos de caracterização de populações e/ou regiões, na segmentação feita pelas empresas face ao seu mercado, etc. A aplicação desta técnica no âmbito da gestão, nomeadamente ao nível do *marketing*, tem vindo a vulgarizar-se e é aplicada sempre que se pretende fazer a classificação e agrupamento de indivíduos por forma a identificar grupos de pessoas com hábitos de consumo similares.

A técnica que iremos abordar neste artigo é conhecida como análise de *clusters*. Quer se trate de um instrumento intermédio de pesquisa ou de uma análise cujo objectivo final seja a constituição de grupos homogéneos de indivíduos, esta técnica revela-se como um instrumento bastante eficiente e de grande interesse². Após a exposição desta técnica procuraremos indicar alguns dos seus campos de aplicação (ponto número 5), deixando desde já em aberto a necessidade de a conjugar, a montante, com a Análise Factorial de Componentes Principais e, a jusante, com os Testes de Hipótese de igualdade de duas médias ou de igualdade de K médias.

Um estudo realizado nos E.U.A. por Thomas C. Kinnear e Ann R. Root, em 1988, revelou que 49% das empresas americanas que têm departamento de *marketing* utilizam esta técnica nos seus estudos de mercado.

Passemos, então, a observar mais de perto, em que consiste e porque é que autores como Thomas C. Kinnear e James R. Taylor consideram a análise de *clusters* uma arte (Kinnear, T. e Taylor, J. ⁴1991: 615).

2. PRESSUPOSTOS DA ANÁLISE DE *CLUSTERS*:

- a) A análise de *clusters* permite ao investigador formar subgrupos de indivíduos (casos³) ou variáveis;
- b) Estes subgrupos (*clusters*) não são definidos *a priori* pelo investigador mas resultam da própria análise;
- c) O agrupamento dos casos ou variáveis parte de uma matriz de associação que se traduz, habitualmente, numa matriz de distâncias/proximidades ou numa matriz de correlação;
- d) Assume-se que qualquer conjunto de dados contém dentro de si subgrupos naturais.

Embora possamos definir clara e objectivamente todos os passos desta técnica, como veremos no exemplo que trataremos adiante, cabe ao investigador seleccionar o número de grupos desejado e, sobretudo, dar significado aos mesmos a partir da análise de cada observação ou variável pertencente a cada grupo. Neste artigo vamos centrar-nos numa análise essencialmente qualitativa (apelando fortemente à *competência* e *sensibilidade* do investigador), à falta de outros instru-

mentos como sejam os Testes de Hipótese que nos podem, de forma objectiva, ajudar a significar os grupos constituídos.

Desta forma, podemos afirmar que esta técnica nos conduz à constituição de grupos, em que cada indivíduo de um mesmo grupo se encontra mais associado aos seus pares do que a qualquer outro indivíduo de outro grupo. No entanto, o significado profundo dessa associação deverá ser encontrado pelo investigador (fazendo uma análise do indivíduo para o grupo), através do maior (ou menor) conhecimento do fenómeno em análise.

Não fosse esta etapa suficiente para garantir à análise de *clusters* um cariz altamente personalizado, porque baseado nas competências e *bom senso* do seu artífice, poderíamos ainda aludir ao pressuposto d) que nos remete para um nível de abstracção suficiente para aceitarmos que, no mais diverso, podemos sempre encontrar partes cujo grau de associação é elevado. Por outro lado, Peter M. Chisnall (p. 317) afirma: “Cluster analysis (...) is not an analytical technique or single method, but a set of numerical methods in which are large areas of subjectivity, so researchers should proceed cautiously”.

3. APRESENTAÇÃO DA TÉCNICA PARA A CONSTITUIÇÃO DOS *CLUSTERS*:

Para ilustrar esta técnica vamos utilizar um exemplo no qual se pretende formar grupos de indivíduos a partir de duas variáveis⁴: Peso e Altura.

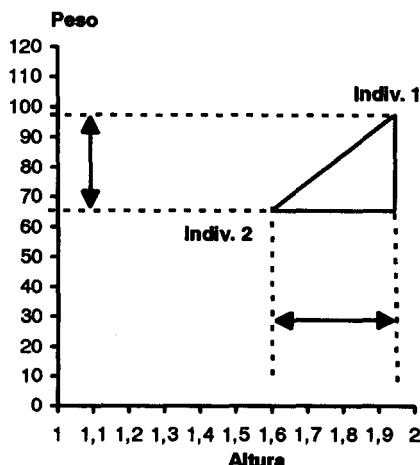
Quadro 1

Variáveis a partir das quais se pretende fazer o agrupamento dos indivíduos

Indivíduos	Peso	Altura
1	95	1,95
2	60	1,60
3	92	1,68
4	60	1,75
5	62	1,72
6	70	1,50
7	68	1,70
8	71	1,55
9	50	1,60
10	44	1,45
11	45	1,50
12	120	1,95
13	95	1,70
14	70	1,60
15	85	1,70
16	80	1,95
17	80	1,78
18	61	1,55
19	48	1,55
20	60	1,78

Podemos representar a posição de cada indivíduo num sistema de eixos ortogonais e calcular a distância entre dois indivíduos calculando, por exemplo, a hipotenusa do triângulo definido pelos mesmos⁵.

Gráfico 1



O cálculo da distância entre os indivíduos pode ser feito recorrendo a diferentes métricas⁶, das quais ilustraremos as seguintes:

a) *Distância Euclidiana*

$$d_{ij} = \sqrt{\sum_{v=1}^p (\chi_{vj} - \chi_{vi})^2}$$

A distância entre dois indivíduos é dada pela raiz quadrada da soma do quadrado das diferenças dos valores de cada variável. Esta é a medida mais utilizada neste tipo de técnica, quando os valores das variáveis se encontram suficientemente dispersos e com uma boa amplitude. Corresponde, no gráfico 1, ao comprimento da hipotenusa.

b) *Distância Euclidiana ao quadrado*

$$d^2_{ij} = \sum_{v=1}^p (\chi_{vj} - \chi_{vi})^2$$

Utiliza-se quando pretendemos ampliar os valores das observações. A distância entre dois indivíduos é a soma do quadrado das diferenças dos valores de cada variável.

c) *City-Block Metria*

$$d_{ij} = \sum_{v=1}^p |\chi_{vj} - \chi_{vi}|$$

A distância entre dois indivíduos corresponde à soma da diferença absoluta de cada variável. Corresponde, no gráfico 1, à soma dos comprimentos dos catetos.

d) *Distância de Chebychev*

$$d_{ij} = \max_v |\chi_{vj} - \chi_{vi}|$$

A distância entre dois indivíduos é dada pela maior diferença absoluta em valor para qualquer variável. Corresponde, no gráfico 1, ao comprimento do cateto mais longo.

e) *Distância de Minkowski*

$$d_{ij} = \left(\sum_{v=1}^p |\chi_{vj} - \chi_{vi}|^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

A distância entre dois indivíduos é a soma da diferença absoluta elevada a r, elevada a 1/r. Inclui a distância euclidiana para o caso especial de r=2.

No nosso exemplo utilizaremos a métrica euclidiana. Assim, a distância entre o 1.º e o 2.º indivíduo será:

$$d_{(1,2)} = \sqrt{(1,95 - 1,60)^2 + (95 - 60)^2}$$

$$d_{(1,2)} = \sqrt{1225,95 - 1,60}$$

$$d_{(1,2)} = 35,0018$$

Após o cálculo das distâncias entre todos os indivíduos chegamos aos resultados que apresentamos na figura 1 (1.ª matriz de distâncias).

Figura 1
1.ª Matriz de distâncias

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0																			
2	35,0018	0																		
3	3,0121	32,0001	0																	
4	35,0006	1,500	32,0001	0																
5	33,0008	2,0036	30,0000	2,0002	0															
6	25,0040	10,0005	22,0007	10,0031	8,0030	0														
7	27,0012	8,0006	24,0000	8,0002	6,0000	2,0100	0													
8	24,0033	11,0001	21,0004	11,0018	9,0016	1,0012	3,0037	0												
9	45,0014	10,0000	42,0001	10,0011	12,0006	20,0002	18,0003	21,0001	0											
10	51,0024	16,0007	48,0005	16,0028	18,0020	26,0000	24,0013	27,0002	6,0019	0										
11	50,0020	15,0003	47,0003	15,0021	17,0014	25,0000	23,0009	26,0000	5,0010	1,0012	0									
12	25,0000	60,0010	28,0013	60,0003	58,0005	50,0020	52,0006	49,0016	70,0009	76,0016	75,0014	0								
13	2,500	35,0001	3,0001	35,0000	33,0000	25,0008	27,0000	24,0006	45,0001	51,0006	50,0004	25,0012	0							
14	25,0024	10,0000	22,0001	10,0011	8,0009	1,000	2,0025	1,0012	20,0000	26,0004	25,0002	50,0012	25,0002	0						
15	10,0031	25,0002	7,0000	25,0000	23,0000	15,0013	17,0000	14,0008	35,0001	41,0008	40,0005	35,0009	10,0000	15,0003	0					
16	15,0000	20,0031	12,0030	20,0010	18,0015	10,0101	12,0026	9,0089	30,0020	36,0035	35,0029	40,0000	15,0021	10,0061	5,0062	0				
17	15,0010	20,0008	12,0004	20,0000	18,0001	10,0039	12,0003	9,0029	30,0005	36,0015	35,0011	40,0004	15,0002	10,0016	5,0006	1,700	0			
18	34,0024	1,0012	31,0003	1,0143	9,0001	7,0016	10,0000	11,0001	17,0003	16,0001	59,0014	34,0003	9,0001	24,0005	19,0042	19,0014	0			
19	47,0017	12,0001	44,0002	12,0017	14,0010	22,0001	20,0006	23,0000	2,0006	4,0012	3,0004	72,0011	47,0002	22,0001	37,0003	32,0025	32,0008	13,0000	0	
20	35,0004	1,500	32,0000	35,0006	2,0009	10,0039	8,0004	11,0024	10,0016	18,0034	15,0026	60,0002	35,0001	10,0018	25,0001	20,0007	20,0000	1,0281	12,0022	0

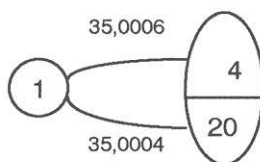
Estamos em presença de uma matriz simétrica, como se percebe facilmente, porque a distância a qualquer indivíduo i e outro j é necessariamente igual à distância entre j e i .

A partir desta matriz podemos começar a agrupar os indivíduos (agrupando em primeiro lugar aqueles que apresentarem menor distância). Trata-se, portanto, de encontrar na matriz de distâncias o menor valor e, depois, saber quais os indivíduos ou grupos que lhe correspondem, fazendo a leitura na 1.ª linha e 1.ª coluna. Após a constituição do grupo, surge um novo problema: como avaliar a distância de um grupo ou indivíduo a outro grupo ou a outro indivíduo? Para este fim utiliza-se um dos critérios que expomos de seguida (Voltaremos ao nosso exemplo adiante).

CrITÉRIOS para o cálculo da distância:

a) *Vizinho mais próximo* (nearest neighbor / single linkage);

Exemplo de recálculo de distâncias após agrupamento:

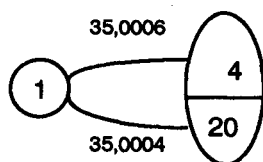


De acordo com este critério, a distância entre 1 e o grupo (4,20) será 35,0004.

Este método é eficiente do ponto de vista do cálculo mas tende a produzir *clusters* de tipo “cobra”⁷.

b) *Vizinho mais afastado* (furthest neighbor / complete linkage);

Exemplo de recálculo de distâncias após agrupamento:

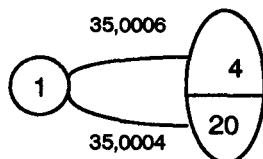


De acordo com este critério, a distância entre 1 e o grupo (4,20) será 35,0006.

Utilizando este método de agrupamento, conseguem-se as vantagens de cálculo do anterior mas produzem-se *clusters* mais equilibrados. Lehmann (p. 629) advoga ser este o método mais indicado no âmbito dos estudos de mercado. Este método, ao contrário do anterior, vai “empurrando” os indivíduos mais próximos para agrupamentos futuros, permitindo um maior equilíbrio entre os grupos que se vão formando.

c) *Média entre grupos* (Average between groups).

Exemplo de recálculo de distâncias após agrupamento:



De acordo com este critério, a distância entre 1 e o grupo (4,20) será 35,0005.

Este critério de agrupamento tende a *normalizar* a estrutura inicial dos dados, fazendo com que os valores extremos sejam mais facilmente agrupados.

d) *Centroide*

A utilização deste método, bem como de todos os demais que nele se baseiam⁸, requer um acréscimo à capacidade de cálculo, uma vez que se torna necessário obter o indivíduo *médio* do grupo — calculando a média das coordenadas dos indivíduos do grupo. Depois de encontrados os valores médios, calcula-se a distância ao indivíduo ou grupo a agrupar, utilizando a distância euclidiana ao quadrado.

No nosso exemplo teríamos:

a) Cálculo dos valores médios das coordenadas dos indivíduos do grupo (4,20);

Indivíduos	Peso	Altura
1	95	1,95
4,20	60	1,765

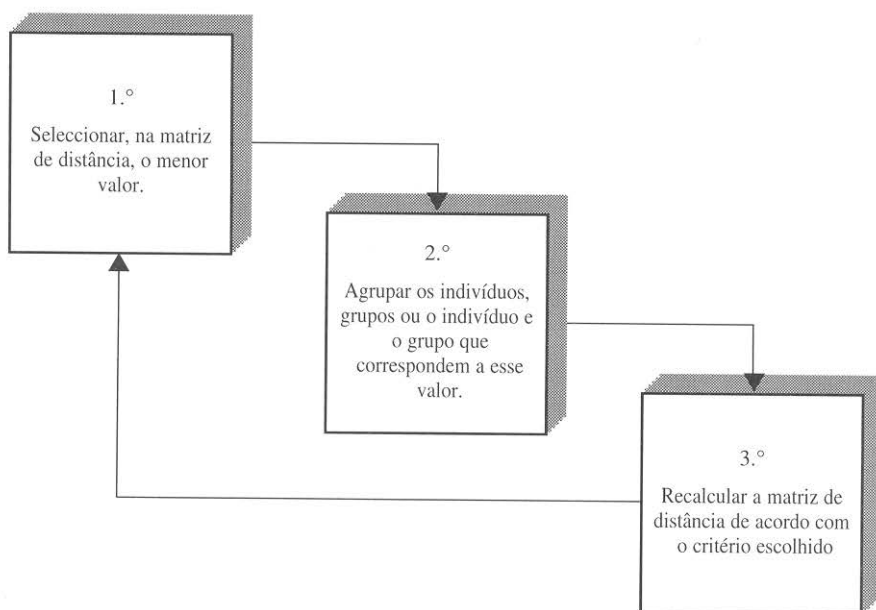
b) Cálculo da distância entre o indivíduo 1 e o *indivíduo médio* do grupo (4,20):

$$d^2_{(1),(4,20)} = \sqrt{(1,95 - 1,765)^2 + (95 - 60)^2}$$

$$d_{(1),(4,20)} = 33,54153$$

Qualquer que seja o critério de agrupamento adoptado, devem ser observadas as seguintes etapas:

Figura 1.1
Etapas para o agrupamento dos indivíduos



De regresso ao nosso exemplo podemos verificar, na matriz de distâncias, que o par de indivíduos que apresentam menor distância são o 4 e o 20, com 0,0300. Estes dois indivíduos constituirão o primeiro grupo (4,20). Após o agrupamento temos que recalcular a matriz de distâncias. Vamos utilizar, a título exemplificativo, o critério da **média entre grupos**.

Figura 2

2.^a matriz de distâncias

Recálculo para o 1.º Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	1	2	3	(4,20)	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0																		
2	35,001	0																	
3	3,0121	32,000	0																
(4,20)	35,000	,165	32,0001	0															
5	33,000	2,0036	30,0000	2,00055	0														
6	25,004	10,000	22,0007	10,0035	8,0030	0													
7	27,001	8,0006	24,0000	8,0003	6,0000	2,0100	0												
8	24,003	11,000	21,0004	11,0021	9,0016	1,0012	3,0037	0											
9	45,001	10,000	42,0001	10,0013	12,000	20,000	18,000	21,000	0										
10	51,002	16,000	48,0005	16,0031	18,002	26,000	24,001	27,000	6,0019	0									
11	50,002	15,000	47,0003	15,0023	17,001	25,000	23,000	26,000	5,0010	1,0012	0								
12	25,000	60,001	28,0013	60,0002	58,000	50,002	52,000	49,001	70,000	78,001	75,001	0							
13	,2500	35,000	3,0001	35,0000	33,000	25,000	27,000	24,000	45,000	51,000	50,000	25,001	0						
14	25,002	10,000	22,0001	10,0013	8,0009	10,003	2,0025	1,0012	20,000	26,000	25,000	50,001	25,000	0					
15	10,003	25,000	7,0000	25,0000	23,000	15,001	17,000	14,000	35,000	41,000	40,000	35,000	10,000	15,000	0				
16	15,000	20,003	12,0030	20,0006	18,001	10,010	12,002	9,0089	30,002	36,003	35,002	40,000	15,002	10,006	5,0062	0			
17	15,001	120,000	12,0004	20,000	18,000	10,003	12,000	9,0029	30,000	36,001	35,001	40,000	15,000	10,001	5,0006	,1700	0		
18	34,002	1,0012	31,0003	1,02295	1,0143	9,0001	7,0016	10,000	11,000	17,000	16,000	59,001	34,000	9,0001	24,000	19,004	19,001	0	
19	47,001	12,000	44,0002	12,0019	14,001	22,000	20,000	23,000	2,0006	4,0012	3,0004	72,001	47,000	22,000	37,000	32,002	32,000	13,000	0

Para sistematizar a informação vamos elaborar um quadro, como o que se apresenta de seguida, onde colocaremos o **passo**, a **distância à qual foi feito o último agrupamento** e os **grupos constituídos**.

Tabela 1

1.º Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{4,20}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19

Após o primeiro agrupamento, verificamos, na matriz anterior, que o par de indivíduos que agora se encontram à menor distância são o 6 e o 14, a uma distância de 0,1000. Vamos, então, recalculer a matriz de distâncias, em função do grupo a formar, definido na matriz anterior, e assinalar na matriz recalculada qual será o próximo grupo, ou seja, os indivíduos ou grupos de indivíduos que se encontrem à menor distância.

Figura 3

3.^a matriz de distâncias

Recálculo para o 2.º Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	1	2	3	(4,20)	5	(6,14)	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19
1	0																	
2	35,0018	0																
3	3,0121	32,0001	0															
(4,20)	35,0005	168	32,00015	0														
5	33,0008	2,0036	30,0000	2,00055	0													
(6,14)	25,0032	10,0025	22,0004	10,0024	8,00195	0												
7	27,0012	8,0006	24,0000	8,0003	6,0000	2,00625	0											
8	24,0033	11,0001	21,0004	11,0021	9,0016	1,0012	3,0037	0										
9	45,0014	10,0000	42,0001	10,00135	12,0008	20,5007	18,0003	21,0001	0									
10	51,0024	16,0007	48,0005	16,0031	18,0020	26,0002	24,0013	27,0002	6,0019	0								
11	50,0020	15,0003	47,0003	15,00235	17,0014	25,0001	23,0009	26,0000	5,0010	1,0012	0							
12	25,0000	60,0010	28,0013	60,00025	58,0005	50,0016	52,0006	49,0016	70,0009	76,0016	75,0014	0						
13	2500	35,0001	3,0001	35,00005	33,0000	25,0005	27,0000	24,0005	45,0001	51,0006	50,0004	25,0012	0					
15	10,0031	25,0002	7,0000	25,00005	23,0000	15,0008	17,0000	14,0008	35,0001	41,0008	40,0005	35,0009	10,0000	0				
16	15,0000	20,0031	12,0030	20,00085	18,0015	10,0081	12,0026	9,0089	30,0020	36,0035	35,0029	40,0000	15,0021	5,0062	0			
17	15,0010	20,0008	12,0004	20,0000	18,0001	10,00275	12,0003	9,0029	30,0005	36,0015	35,0011	40,0004	15,0002	5,0008	1,700	0		
18	34,0024	1,0012	31,0003	1,02295	1,0143	9,0001	7,0016	10,0000	11,0001	17,0003	16,0001	59,0014	34,0003	24,0005	19,0042	19,0014	0	
19	47,0017	12,0001	44,0002	12,00195	14,0010	22,0001	20,0006	23,0000	2,0006	4,0012	3,0004	72,0011	47,0002	37,0003	32,0025	32,0006	13,0000	0

Tabela 2

2.º Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{4,20}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{6,14}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19

O grupo (4,20) e o indivíduo 2 são os que se encontram à menor distância, como podemos verificar na matriz anterior. O próximo grupo será, então, constituído pelos indivíduos (4,20,2). O recálculo desta e das demais matrizes, até que todos os indivíduos se encontrem agrupados num único grupo, exceptuando o último agrupamento, encontram-se no anexo II.

A 18.^a matriz correspondente ao 17.º agrupamento e apresenta-se de seguida. Podemos verificar que este é o último passo a dar em termos de agrupamentos porque, após o mesmo, ficamos apenas com um único grupo (composto por todos os indivíduos), onde o indivíduo 12 é agrupado aos demais a uma distância de 48,0011.

Figura 4

18.^a matriz de distâncias

Recálculo para o 17.^o Agrupamento — Critério → Média entre grupos

(1,13,3,16,17,15),(4,20,2,18,5,6,14,8,7, 9,19,10,11)	(1,13,3,16,17,15),(4,20,2,18,5,6,14,8,7, 9,19,10,11)	12
12	48,0011	0

Tabela 3

18.^o Quadro Síntese

Linha ^a	Passo	Distância	Grupos
19	1	$d_{(4,20)}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
18	2	$d_{(6,14)}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
17	3	$d_{(4,20,2)}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
16	4	$d_{(1,13,3)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
15	5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
14	6	$d_{(10,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
13	7	$d_{(6,14,8)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
12	8	$d_{(4,20,2,18)}=1,0121$	(1,13),(4,20,2,18),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
11	9	$d_{(4,20,2,18,6)}=1,5082$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
10	10	$d_{(6,14,8,7)}=2,0006$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
9	11	$d_{(6,14,8,7,2)}=2,505$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
8	12	$d_{(1,13,3)}=3,0061$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
7	13	$d_{(2,19),(1,13,11)}=4,5012$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19,10,11),12,15,(16,17)
6	14	$d_{(1,13,17,19)}=5,0034$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19,10,11),12,(16,17,15)
5	15	$d_{(4,20,2,18,8),(6,14,8,7)}=8,001$	(1,13,3),(4,20,2,18,5,6,14,8,7),(9,19,10,11),12,(16,17,15)
4	16	$d_{(1,13,3),(1,16,17,19)}=11,5011$	(1,13,3,16,17,15),(4,20,2,18,5,6,14,8,7),(9,19,10,11),12
3	17	$d_{(4,20,2,18,5,6,14,8,7),(9,19,10,11)}=18,5164$	(1,13,3,16,17,15),(4,20,2,18,5,6,14,8,7,9,19,10,11),12
2	18	$d_{(1,13,3,16,17,15),(4,20,2,18,5,6,14,8,7,9,19,10,11)}=32,001$	(1,13,3,16,17,15,4,20,2,18,5,6,14,8,7,9,19,10,11),12
1	19	$d_{(1,13,3,16,17,15,4,20,2,18,5,6,14,8,7,9,19,10,11),12}=48,0011$	(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20)

4. ANÁLISE DOS RESULTADOS:

Terminado o processo de constituição dos grupos, podemos verificar no quadro anterior que os indivíduos mais próximos são o 4 e o 20, a uma distância de 0,03. À medida que a distância vai aumentando, novos grupos se vão formando ou grupos já formados vão alargando o seu efectivo. Este processo culmina com a constituição de um único grupo que reúne todos os indivíduos, no nosso exemplo, a uma distância de 48,0011.

A leitura deste último quadro-síntese fornece-nos todos os elementos de que necessitamos para analisar os grupos constituídos; todavia, essa leitura não se torna muito acessível. Por isso apresentamos, de seguida, as duas *ferramentas* mais utilizadas, para facilitar a interpretação destes resultados, tendo em vista a tomada de decisão sobre o número de *clusters* a reter.

a) O gráfico Iccle

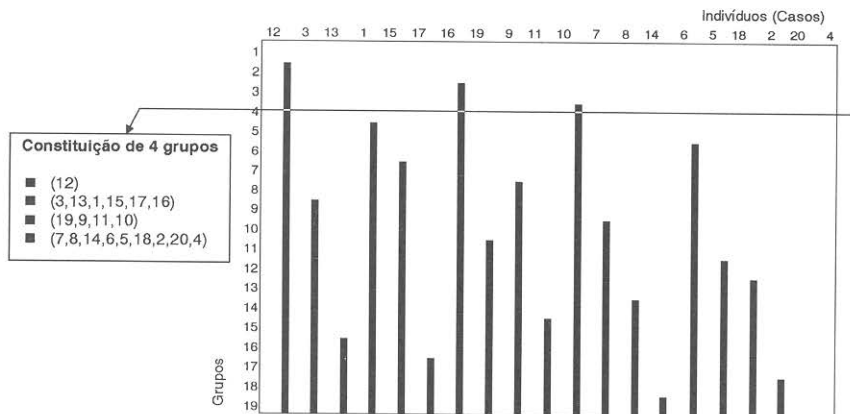
Neste gráfico os indivíduos, observações ou casos são representados em coluna e o número de grupos é representado em linha. A primeira coluna representa o

último indivíduo a ser agrupado e a última coluna representa o primeiro indivíduo a ser agrupado. As linhas representam os passos dados ao longo do processo de agrupamento.

O gráfico deve ser lido de baixo para cima. A última linha do gráfico representa o primeiro passo do agrupamento e a primeira linha representa o último passo, onde todos os indivíduos se encontram agrupados num único grupo. Geralmente não se representa o passo zero (seria a linha 20 do gráfico), onde todos os indivíduos se encontrariam separados e, consequentemente, o número de grupos seria igual ao número de indivíduos (no nosso exemplo 20). Os números das linhas representam o número de grupos formados.

Neste gráfico, cada indivíduo é representado por uma coluna que é separada das demais por uma coluna em branco. À medida que os indivíduos vão sendo agrupados, a coluna em branco, que os separa, desaparece. Através deste gráfico, pode-se ensaiar a constituição de diferentes *clusters* em função do número de grupos que se selecciona na primeira coluna, cortando o gráfico horizontalmente.

Gráfico 2
Icicle



b) O Dendrograma

A outra forma de visualização dos resultados da análise de *clusters* é o dendrograma. Neste gráfico podemos identificar a forma como os grupos vão sendo formados e os valores dos respectivos coeficientes para cada passo.

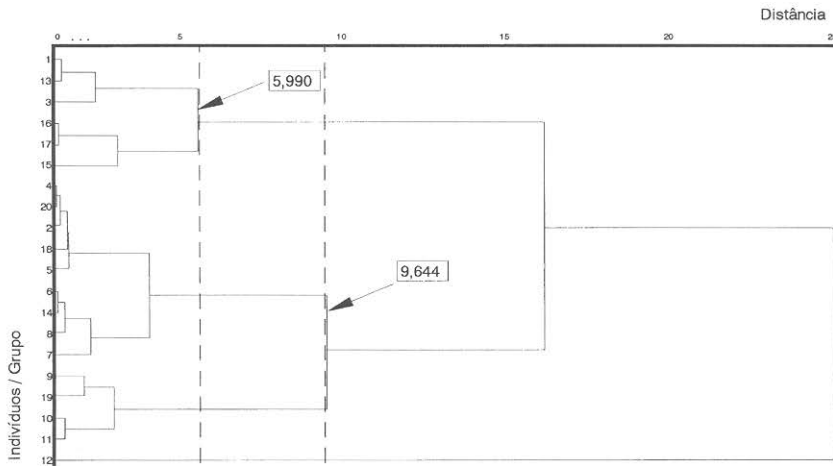
Enquanto no Icicle partimos do número de grupos que se pretende constituir, embora não saibamos nada sobre a distância a que estes se formam, no dendro-

grama partimos da distância desejada entre os grupos e, de seguida, vamos saber quantos grupos se formam àquela distância e quem são os indivíduos que compõem esses grupos.

No dendrograma encontramos os indivíduos em linha e em coluna as distâncias. Habitualmente as distâncias representadas no dendrograma vão até 25, sendo as distâncias reais (aquelas às quais foram constituídos os grupos) recalculadas para este valor máximo¹⁰.

O dendrograma deve ser cortado na vertical, à distância pretendida, e de seguida deve-se verificar o número de grupos formados, bem como os indivíduos pertencentes a cada grupo.

Gráfico 3
Dendrograma



Se cortarmos o dendrograma a uma distância superior a 5,990 e inferior a 9,644, ficamos com 4 grupos de indivíduos. Assim sendo, um dos grupos é formado pelos indivíduos 1,3,13,15,16 e 17; outro é formado pelos indivíduos 2,4,5,6,7,8,14,18 e 20; outro formado por 9,10,11 e 19; e o último grupo formado por um único indivíduo, o n.º 12.

Fazendo uma análise qualitativa destes grupos, podemos afirmar o seguinte:

- O grupo (1,3,13,15,16,17) é caracterizado por ser constituído por indivíduos com pesos compreendidos entre [80-95] Kg e alturas compreendidas entre [1,68-1,95] m;
- O grupo (2,4,5,6,7,8,14,18,20) é caracterizado por ser constituído por indivíduos com pesos compreendidos entre [60-71] Kg e alturas compreendidas entre [1,68-1,95] m;

- O grupo (9,10,11,19) é caracterizado por ser constituído por indivíduos com pesos compreendidos entre [44-50] Kg e alturas compreendidas entre [1,45-1,60] m;
- O grupo constituído pelo indivíduo 12 caracteriza-se por ter o peso de 120 Kg e altura de 1,95 m.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS:

A análise de *clusters*, como tivemos ocasião de referir anteriormente, é uma técnica que pode ser posta ao serviço das várias ciências. No entanto, para aquilo que nos interessa, torna-se agora oportuno tecer algumas considerações sobre a aplicação desta técnica, conjugada com outros instrumentos de análise, no âmbito da gestão.

A título meramente indicativo podemos sugerir os seguintes campos de aplicação:

- a) Caracterização de uma população-alvo ao nível de estudos exploratórios e/ou conclusivos tendo em vista, por exemplo, a implementação de uma nova indústria, um reposicionamento estratégico, o lançamento de um novo produto, etc;
- b) Segmentação do mercado a partir do conhecimento dos traços característicos de cada grupo de consumidores;
- c) Caracterização da oferta tendo em vista, por exemplo, a constituição de grupos estratégicos, detecção de sinergias, etc;
- d) Construção de perfis profissionais, melhor adequação entre qualificações e especificações do posto de trabalho, etc;

Estes são alguns exemplos, na área da gestão, onde a aplicação desta técnica, conjugada com outros instrumentos de análise — nomeadamente a Análise Factorial de Componentes Principais e os Testes de Hipótese — se mostra de grande valia.

Gostaríamos, no entanto, de referir que a análise de *clusters*, de *per si*, não nos fornece respostas objectivas sobre o significado dos grupos constituídos. É aqui que se torna essencial a utilização dos testes de hipótese de igualdade de médias (o teste T, para a igualdade de duas médias e o teste de análise de variância¹¹, para a igualdade de mais do que duas médias), para que se possa saber a que níveis os grupos formados são iguais ou diferentes. A aceitação ou rejeição das hipóteses que formulármos para as diferentes variáveis a testar (necessariamente relevantes do ponto de vista do estudo em causa), em função dos grupos constituídos, *a priori* pela análise de *clusters*, vai-nos permitir caracterizar cada um desses grupos.

Por outro lado, a criação dos grupos, através da análise de *clusters*, tornar-se-á tanto mais interessante quanto maior for a quantidade de informação existente para a constituição desses grupos. É nesta perspectiva que habitualmente se uti-

liza a Análise Factorial de Componentes Principais (AFCP), como técnica que nos fornecerá os *inputs* para a constituição dos *clusters*. Através da AFCP conseguimos reduzir o número de variáveis em análise, que passam a ser *bem representadas* pelos factores constituídos. Os Factores criados devem explicar uma percentagem elevada da variância das variáveis que agregam e sugerir o significado dessa agregação. São estes Factores ou Componentes Principais que vão alimentar a análise de *Clusters*.

No fim deste artigo ficamos com a sensação de termos começado a obra pelo meio. Esta sensação é minorada pelo facto de a técnica apresentada poder constituir, por si só, uma unidade de análise de dados. Fica, no entanto, a promessa de no futuro voltarmos a este assunto, abordando a Análise Factorial de Componentes Principais e os Testes de Hipótese referidos.

NOTAS

¹ Tomamos por indivíduo: seres, objectos, um conjunto de características, etc.

² Registe-se, a este propósito, que a análise de *clusters* é, a maior parte das vezes, utilizada como técnica intermédia. Com isto queremos dizer que, habitualmente, os *inputs* da análise de *clusters* não são variáveis simples mas componentes principais (resultantes da análise factorial de componentes principais). Por outro lado, os grupos construídos pela análise de *clusters* são testados e ganham significado através da aplicação, aos diferentes grupos, de testes de hipótese (sejam eles de duas ou mais médias). Através deles verifica-se se, por exemplo, a importância média dada a determinada componente principal é igual em ambos os sexos (teste de igualdade de duas médias) ou, se a importância média dada a determinada componente principal é igual nos diferentes grupos (teste de igualdade de K médias).

³ Utilizamos o termo **casos**, como sinónimo de observações ou indivíduos por ser esta a terminologia utilizada ao nível do “software” estatístico, nomeadamente pelo SPSS (Statistical Package for the Social Sciences).

⁴ O exemplo que iremos utilizar tem por único objectivo ilustrar esta técnica. Refira-se, ainda, que vários autores, entre os quais Lehmann, ³1989 (p. 639), referem que a análise de *clusters* só deve ser feita para um conjunto de dados que contenham, pelo menos, 30 observações (casos). Daqui retira-se, habitualmente, a regra de constituir 1 *cluster* por cada 30 indivíduos, ou seja, o número de *clusters* a constituir deverá andar perto de $n/30$.

⁵ Recordemos o teorema de Pitágoras: “O quadrado da hipotenusa é igual á soma do quadrado dos catetos.”

⁶ Estes são os métodos de cálculo utilizados pelo SPSS. Veja-se, a este respeito, a melhor adequação entre o método de cálculo das distâncias e o método de agrupamento a utilizar em: NORUSIS, Marija J., *SPSS Professional Statistics*, SPSS inc.

⁷ Esta terminologia é utilizada por Lehmann, *Market Research and Analysis*, ³1989 (p. 629)

⁸ Referimo-nos, especificamente, ao método de Ward e ao método da Mediana que não desenvolveremos neste artigo por se tratar de métodos baseados nos Centroides.

⁹ Invertemos a numeração dos passos para facilitar a compreensão do gráfico Icicle.

¹⁰ Este procedimento justifica-se na medida em que, a partir dos novos valores (relativos), é possível estabelecer comparações entre diferentes dendrogramas resultantes de diversas análises de *clusters*.

¹¹ Embora o SPSS chame este teste de análise de variância, trata-se de um teste de igualdade de mais do que duas médias apoiado na distribuição F de Snedcor.

BIBLIOGRAFIA

- CHISNALL, Peter M., ³1986, *Marketing Research*, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited.
- HAIR, JOSEPH F. *et al.*, ⁴1995, *Multivariate data Analysis*, Prentice Hall, New Jersey.
- LEHMANN, Donald R., ³1989, *Market Research and Analysis*, IRWIN:Boston
- KINNEAR, T. e Taylor, J., ⁴1991, *Marketing Research, An applied approach*, McGraw—Hill:International Editions.
- NORUSIS, Marija J., 1992, *SPSS Base System Users Guide*, SPSS inc.
- NORUSIS, Marija J., 1992, *SPSS Professional Statistics*, SPSS inc.
- REIS, Elizabeth e MOREIRA, Raúl, 1993, *Pesquisa de Mercado*, Lisboa, Ed. Sílabo.

ANEXOS

3.^a MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 2.^o Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	1	3	(4,20),2	5	(6,14)	7	8	9	10	11	12	13	15	16	17	18	19
1	0																
3	3,0121	0															
(4,20),2	35,0012	32,0001	0														
5	33,0008	30,0000	2,0021	0													
(6,14)	25,0032	22,0004	10,0013	8,00195	0												
7	27,0012	24,0000	8,0005	6,0000	2,00625	0											
8	24,0033	21,0004	11,0011	9,0016	1,0012	3,0037	0										
9	45,0014	42,0001	10,0007	12,0006	20,5007	18,0003	21,0001	0									
10	51,0024	48,0005	16,0019	18,0020	26,0002	24,0013	27,0002	8,0019	0								
11	50,0020	47,0003	15,0013	17,0014	25,0001	23,0009	26,0000	5,0010	1,0012	0							
12	25,0000	28,0013	60,0006	58,0005	50,0016	52,0006	49,0016	70,0009	76,0016	75,0014	0						
13	2500	3,0001	35,0001	33,0000	25,0005	27,0000	24,0005	45,0001	51,0006	50,0004	25,0012	0					
15	10,0031	7,0000	25,0001	23,0000	15,0008	17,0000	14,0008	35,0001	41,0008	40,0005	35,0009	10,0000	0				
16	15,0000	12,0030	20,002	18,0015	10,0081	12,0025	9,0089	30,0020	36,0035	35,0029	40,0000	15,0021	5,0062	0			
17	15,0010	12,0004	20,0004	18,0001	10,00275	12,0003	9,0029	30,0005	36,0015	35,0011	40,0004	15,0002	5,0006	1700	0		
18	34,0024	31,0003	1,0121	1,0143	9,0001	7,0016	10,0000	11,0001	17,0003	16,0001	59,0014	34,0003	24,0005	19,0042	19,0014	0	
19	47,0017	44,0002	12,001	14,0010	22,0001	20,0006	23,0000	2,0006	4,0012	3,0004	72,0011	47,0002	37,0003	32,0025	32,0008	13,0000	0

3.^o Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{(4,20)}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{(6,14)}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20),2}=0,165$	1,(4,20),2,3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19

4.^a MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 3.º Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	1	3	(4,20,2)	5	(6,14)	7	8	9	10	11	12	13	15	(16,17)	18	19
1	0															
3	3,0121	0														
(4,20,2)	35,0012	32,0001	0													
5	33,0008	30,0000	2,0021	0												
(6,14)	25,0032	22,0004	10,0013	8,00195	0											
7	27,0012	24,0000	8,0005	6,0000	2,00225	0										
8	24,0033	21,0004	11,0011	9,0016	1,0012	3,0037	0									
9	45,0014	42,0001	10,0007	12,0006	20,5007	18,0003	21,0001	0								
10	51,0024	48,0005	16,0019	18,0020	26,0002	24,0013	27,0002	6,0019	0							
11	50,0020	47,0003	15,0013	17,0014	25,0001	23,0009	26,0000	5,0010	1,0012	0						
12	25,0000	28,0013	60,0008	58,0005	50,0016	52,0008	49,0016	70,0009	78,0016	75,0014	0					
13	25,0000	3,0001	35,0001	33,0000	25,0005	27,0000	24,0005	45,0001	51,0006	50,0004	25,0012	0				
15	10,0031	7,0000	25,0001	23,0000	15,0008	17,0000	14,0008	35,0001	41,0008	40,0005	35,0009	10,0000	0			
(16,17)	15,0005	12,0017	20,0012	18,0008	10,0054	12,0015	9,0059	30,0013	36,0025	35,0002	40,0002	15,0012	5,0034	0		
18	34,0024	31,0003	1,0121	1,0143	9,0001	7,0016	10,0000	11,0001	17,0003	18,0001	59,0014	34,0003	24,0005	19,0028	0	
19	47,0017	44,0002	12,001	14,0010	22,0001	20,0008	23,0000	2,0006	4,0012	3,0004	72,0011	47,0002	37,0003	32,0017	13,0000	0

4.º Quadro -síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{4,20,2}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{6,14}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20,2)}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19

5.^a MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 4.º Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13)	3	(4,20,2)	5	(6,14)	7	8	9	10	11	12	15	(16,17)	18	19
(1,13)	0														
3	3,0061	0													
(4,20,2)	35,0007	32,0001	0												
5	33,0004	30,0000	2,0021	0											
(6,14)	25,0019	22,0004	10,0013	8,00195	0										
7	27,0008	24,0000	8,0005	6,0000	2,00225	0									
8	24,0019	21,0004	11,0011	9,0016	1,0012	3,0037	0								
9	45,0008	42,0001	10,0007	12,0006	20,5007	18,0003	21,0001	0							
10	51,0015	48,0005	16,0019	18,0020	26,0002	24,0013	27,0002	6,0019	0						
11	50,0012	47,0003	15,0013	17,0014	25,0001	23,0009	26,0000	5,0010	1,0012	0					
12	25,0008	28,0013	60,0006	58,0005	50,0016	52,0006	49,0016	70,0009	78,0016	75,0014	0				
15	10,0016	7,0000	25,0001	23,0000	15,0008	17,0000	14,0008	35,0001	41,0008	40,0005	35,0009	0			
(16,17)	15,0005	12,0017	20,0012	18,0008	10,0054	12,0015	9,0059	30,0013	36,0025	35,0002	40,0002	5,0034	0		
18	34,0014	31,0003	1,0121	1,0143	9,0001	7,0016	10,0000	11,0001	17,0003	16,0001	59,0014	24,0005	19,0028	0	
19	47,0010	44,0002	12,001	14,0010	22,0001	20,0006	23,0000	2,0006	4,0012	3,0004	72,0011	37,0003	32,0017	13,0000	0

6.^a MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 5.º Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13)	3	(4,20,2)	5	(6,14)	7	8	9	(10,11)	12	15	(16,17)	18	19
(1,13)	0													
3	3,0081	0												
(4,20,2)	35,0007	32,0001	0											
5	33,0004	30,0000	2,0021	0										
(6,14)	25,0019	22,0004	10,0013	8,00195	0									
7	27,0008	24,0000	8,0005	6,0000	2,00625	0								
8	24,0019	21,0004	11,0011	9,0018	1,0012	3,0037	0							
9	45,0008	42,0001	10,0007	12,0008	20,5007	18,0003	21,0001	0						
(10,11)	50,5014	47,5004	15,5016	17,5017	25,5002	23,5011	26,5001	5,5015	0					
12	25,0008	28,0013	60,0008	58,0005	50,0018	52,0008	49,0018	70,0009	75,5015	0				
15	10,0016	7,0000	25,0001	23,0000	15,0008	17,0000	14,0008	35,0001	40,5007	35,0009	0			
(16,17)	15,0009	12,0017	20,0012	18,0008	10,0054	12,0015	9,0059	30,0013	35,5023	40,0002	5,0034	0		
18	34,0014	31,0003	1,0121	1,0143	9,0001	7,0016	10,0000	11,0001	16,5002	59,0014	24,0005	19,0028	0	
19	47,0010	44,0002	12,0011	14,0010	22,0001	20,0008	23,0000	2,0006	3,5008	72,0011	37,0003	32,0017	13,0000	0

6.º Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{(4,20)}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{(6,14)}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20,2)}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
6	$d_{(10,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19

7.^a MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 6.º Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13)	3	(4,20,2)	5	(6,14),8	7	9	(10,11)	12	15	(16,17)	18	19
(1,13)	0												
3	3,0081	0											
(4,20,2)	35,0007	32,0001	0										
5	33,0004	30,0000	2,0021	0									
(6,14),8	24,5019	21,5004	10,5012	8,5018	0								
7	27,0008	24,0000	8,0005	6,0000	2,5050	0							
9	45,0008	42,0001	10,0007	12,0008	20,7504	18,0003	0						
(10,11)	50,5014	47,5004	15,5016	17,5017	26,0002	23,5011	5,5015	0					
12	25,0008	28,0013	60,0008	58,0005	49,5016	52,0008	70,0009	75,5015	0				
15	10,0016	7,0000	25,0001	23,0000	14,5008	17,0000	35,0001	40,5007	35,0009	0			
(16,17)	15,0009	12,0017	20,0012	18,0008	9,5057	12,0015	30,0013	35,5023	40,0002	5,0034	0		
18	34,0014	31,0003	1,0121	1,0143	9,5001	7,0016	11,0001	16,5002	59,0014	24,0005	19,0028	0	
19	47,0010	44,0002	12,0011	14,0010	22,5001	20,0008	2,0006	3,5008	72,0011	37,0003	32,0017	13,0000	0

7.º Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{(4,20)}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{(6,14)}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20,2)}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
6	$d_{(10,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
7	$d_{(6,14),8}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19

8.ª MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 7.º Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13)	3	(4,20,2,18)	5	(6,14,8)	7	9	(10,11)	12	15	(16,17)	19
(1,13)	0											
3	3,0061	0										
(4,20,2,18)	34,5011	31,5002	0									
5	33,0004	30,0000	1,5062	0								
(6,14,8)	24,5019	21,5004	10,0007	8,5018	0							
7	27,0006	24,0000	7,5011	6,0000	2,5050	0						
9	45,0008	42,0001	10,5004	12,0006	20,7504	18,0003	0					
(10,11)	50,5014	47,5004	16,0009	17,5017	26,0002	23,5011	5,5015	0				
12	25,0006	28,0013	59,501	58,0005	49,5016	52,0006	70,0009	75,5015	0			
15	10,0016	7,0000	24,5003	23,0000	14,5008	17,0000	35,0001	40,5007	35,0009	0		
(16,17)	15,0009	12,0017	19,502	18,0008	9,5057	12,0015	30,0013	35,5023	40,0002	5,0034	0	
19	47,0010	44,0002	12,5005	14,0010	22,5001	20,0006	2,0006	3,5008	72,0011	37,0003	32,0017	0

8.º Quadro -síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{4,20}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{6,14}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20),2}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
6	$d_{(10,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
7	$d_{(6,14),8}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
8	$d_{(4,20,2,18)}=1,0121$	(1,13),(4,20,2,18),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19

9.ª MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 8.º Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13)	3	(4,20,2,18),5	(6,14,8)	7	9	(10,11)	12	15	(16,17)	19
(1,13)	0										
3	3,0061	0									
(4,20,2,18),5	33,7508	30,7501	0								
(6,14,8)	24,5019	21,5004	9,2513	0							
7	27,0006	24,0000	6,7506	2,5050	0						
9	45,0008	42,0001	11,2505	20,7504	18,0003	0					
(10,11)	50,5014	47,5004	16,7513	26,0002	23,5011	5,5015	0				
12	25,0006	28,0013	58,7508	49,5016	52,0006	70,0009	75,5015	0			
15	10,0016	7,0000	23,7502	14,5008	17,0000	35,0001	40,5007	35,0009	0		
(16,17)	15,0009	12,0017	18,7514	9,5057	12,0015	30,0013	35,5023	40,0002	5,0034	0	
19	47,0010	44,0002	13,2508	22,5001	20,0006	2,0006	3,5008	72,0011	37,0003	32,0017	0

9.º Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{4,20}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{6,14}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20),2}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
6	$d_{(10,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
7	$d_{(6,14),8}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
8	$d_{(4,20,2,18)}=1,0121$	(1,13),(4,20,2,18),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
9	$d_{(4,20,2,18),5}=1,5082$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19

10.^a MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 9.º Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13)	3	(4,20,2,18,5)	(6,14,8)	7	(9,19)	(10,11)	12	15	(16,17)
(1,13)	0									
3	3,0061	0								
(4,20,2,18,5)	33,7508	30,7501	0							
(6,14,8)	24,5019	21,5004	9,2513	0						
7	27,0006	24,0000	6,7506	2,5050	0					
(9,19)	46,0009	43,0002	12,2507	21,6253	19,0005	0				
(10,11)	50,5014	47,5004	16,7513	26,0002	23,5011	4,5012	0			
12	25,0006	28,0013	58,7508	49,5016	52,0006	71,001	75,5015	0		
15	10,0016	7,0000	23,7502	14,5008	17,0000	36,0002	40,5007	35,0009	0	
(16,17)	15,0009	12,0017	18,7514	9,5057	12,0015	31,0015	35,5023	40,0002	5,0034	0

10.º Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{(4,20)}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{(6,14)}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20,2)}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
6	$d_{(10,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
7	$d_{(6,14,8)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
8	$d_{(4,20,2,18)}=1,0121$	(1,13),(4,20,2,18),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
9	$d_{(4,20,2,18),5}=1,5082$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
10	$d_{(9,19)}=2,0006$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,(9,19),(10,11),12,15,(16,17)

11.^a MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 10.º Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13)	3	(4,20,2,18,5)	(6,14,8),7	(9,19)	(10,11)	12	15	(16,17)
(1,13)	0								
3	3,0061	0							
(4,20,2,18,5)	33,7508	30,7501	0						
(6,14,8),7	25,7513	22,7502	8,001	0					
(9,19)	46,0009	43,0002	12,2507	20,3129	0				
(10,11)	50,5014	47,5004	16,7513	24,7507	4,5012	0			
12	25,0006	28,0013	58,7508	50,7511	71,001	75,5015	0		
15	10,0016	7,0000	23,7502	15,7504	36,0002	40,5007	35,0009	0	
(16,17)	15,0009	12,0017	18,7514	10,7536	31,0015	35,5023	40,0002	5,0034	0

11.º Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{(4,20)}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{(6,14)}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20,2)}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
6	$d_{(10,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
7	$d_{(6,14,8)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
8	$d_{(4,20,2,18)}=1,0121$	(1,13),(4,20,2,18),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
9	$d_{(4,20,2,18),5}=1,5082$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
10	$d_{(9,19)}=2,0006$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
11	$d_{(6,14,8),7}=2,505$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17)

12.^a MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 11.^o Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13),3	(4,20,2,18,5)	(6,14,8,7)	(9,19)	(10,11)	12	15	(16,17)
(1,13),3	0							
(4,20,2,18,5)	32,2505	0						
(6,14,8,7)	24,2508	8,001	0					
(9,19)	44,5006	12,2507	20,3129	0				
(10,11)	49,0009	16,7513	24,7507	4,5012	0			
12	26,501	58,7508	50,7511	71,001	75,5015	0		
15	8,5008	23,7502	15,7504	36,0002	40,5007	35,0009	0	
(16,17)	14,5013	18,7514	10,7536	31,0015	35,5023	40,0002	5,0034	0

12.^o Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{4,20}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{6,14}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20),2}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
6	$d_{(10,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
7	$d_{(6,14),8}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
8	$d_{(4,20,2,18),5}=1,0121$	(1,13),(4,20,2,18),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
9	$d_{(4,20,2,18),5}=1,5082$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
10	$d_{(9,19)}=2,0006$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
11	$d_{(6,14,8),7}=2,505$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
12	$d_{(1,13),3}=3,0061$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17)

13.^a MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 12.^o Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13,3)	(4,20,2,18,5)	(6,14,8,7)	(9,19),(10,11)	12	15	(16,17)
(1,13,3)	0						
(4,20,2,18,5)	32,2505	0					
(6,14,8,7)	24,2508	8,001	0				
(9,19),(10,11)	46,7506	14,501	22,5318	0			
12	26,501	58,7508	50,7511	73,2513	0		
15	8,5008	23,7502	15,7504	38,2505	35,0009	0	
(16,17)	14,5013	18,7514	10,7536	33,2519	40,0002	5,0034	0

13.^o Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{4,20}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{6,14}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20),2}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
6	$d_{(10,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
7	$d_{(6,14),8}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
8	$d_{(4,20,2,18),5}=1,0121$	(1,13),(4,20,2,18),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
9	$d_{(4,20,2,18),5}=1,5082$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
10	$d_{(9,19)}=2,0006$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
11	$d_{(6,14,8),7}=2,505$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
12	$d_{(1,13),3}=3,0061$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
13	$d_{(9,19),(10,11)}=4,5012$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19,10,11),12,15,(16,17)

14.^a MATRIZ DE DISTÂNCIASRecálculo para o 13.^o Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13,3)	(4,20,2,18,5)	(6,14,8,7)	(9,19,10,11)	12	(16,17,15)
(1,13,3)	0					
(4,20,2,18,5)	32,2505	0				
(6,14,8,7)	24,2508	8,0011	0			
(9,19,10,11)	46,7506	14,501	22,5318	0		
12	26,501	58,7508	50,7511	73,2513	0	
(16,17,15)	11,5011	21,2508	13,252	35,7512	37,5001	0

14.^o Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{(4,20)}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{(6,14)}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20,2)}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
6	$d_{(10,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
7	$d_{(6,14,8)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
8	$d_{(4,20,2,18)}=1,0121$	(1,13),(4,20,2,18),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
9	$d_{(4,20,2,18,5)}=1,5082$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
10	$d_{(9,19)}=2,0006$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,(9,19),(10,11),12,15,(16,17),19
11	$d_{(6,14,8,7)}=2,505$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17),19
12	$d_{(1,13,3)}=3,0061$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17),19
13	$d_{(9,19,10,11)}=4,5012$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19,10,11),12,15,(16,17),19
14	$d_{(16,17,15)}=5,0034$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19,10,11),12,(16,17,15),19

15.^a MATRIZ DE DISTÂNCIASRecálculo para o 14.^o Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13,3)	(4,20,2,18,5)(6,14,8,7)	(9,19,10,11)	12	(16,17,15)
(1,13,3)	0				
(4,20,2,18,5)(6,14,8,7)	28,2504	0			
(9,19,10,11)	46,7506	18,5164	0		
12	26,501	54,751	73,2513	0	
(16,17,15)	11,5011	17,2514	35,7512	37,5001	0

15.^o Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{(4,20)}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{(6,14)}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20,2)}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
6	$d_{(10,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
7	$d_{(6,14,8)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
8	$d_{(4,20,2,18)}=1,0121$	(1,13),(4,20,2,18),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
9	$d_{(4,20,2,18,5)}=1,5082$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
10	$d_{(9,19)}=2,0006$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,(9,19),(10,11),12,15,(16,17),19
11	$d_{(6,14,8,7)}=2,505$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17),19
12	$d_{(1,13,3)}=3,0061$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17),19
13	$d_{(9,19,10,11)}=4,5012$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19,10,11),12,15,(16,17),19
14	$d_{(16,17,15)}=5,0034$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19,10,11),12,(16,17,15),19
15	$d_{(4,20,2,18,5)(6,14,8,7)}=8,0001$	(1,13,3),(4,20,2,18,5,6,14,8,7),(9,19,10,11),12,(16,17,15),19

16.ª MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 15.º Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13,3),(16,17,15)	(4,20,2,18,5,6,14,8,7)	(9,19,10,11)	12
(1,13,3),(16,17,15)	0			
(4,20,2,18,5,6,14,8,7)	22,7509	0		
(9,19,10,11)	41,2509	18,5164	0	
12	32,001	54,751	73,2513	0

16.º Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{(4,20)}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{(6,14)}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20),2}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
6	$d_{(9,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
7	$d_{(6,14),8}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
8	$d_{(4,20,2),18}=1,0121$	(1,13),(4,20,2,18),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
9	$d_{(4,20,2,18),5}=1,5082$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
10	$d_{(9,19)}=2,0006$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
11	$d_{(6,14,8),7}=2,505$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
12	$d_{(1,13),3}=3,0061$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
13	$d_{(9,19),(10,11)}=4,5012$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19,10,11),12,15,(16,17)
14	$d_{(16,17),15}=5,0034$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19,10,11),12,(16,17,15)
15	$d_{(4,20,2,18,5),(6,14,8,7)}=8,001$	(1,13,3),(4,20,2,18,5,6,14,8,7),(9,19,10,11),12,(16,17,15)
16	$d_{(1,13,3),(16,17,15)}=11,5011$	(1,13,3,16,17,15),(4,20,2,18,5,6,14,8,7),(9,19,10,11),12,

17.ª MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Recálculo para o 16.º Agrupamento — Critério → Média entre grupos

	(1,13,3,16,17,15)	(4,20,2,18,5,6,14,8,7),(9,19,10,11)	12
(1,13,3,16,17,15)	0		
(4,20,2,18,5,6,14,8,7),(9,19,10,11)	32,001	0	
12	32,001	64,0012	0

17.º Quadro-síntese

Passo	Distância	Grupos
1	$d_{(4,20)}=0,03$	1,2,3,(4,20),5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19
2	$d_{(6,14)}=0,1$	1,2,3,(4,20),5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
3	$d_{(4,20),2}=0,165$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18,19
4	$d_{(16,17)}=0,17$	1,(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,13,15,(16,17),18,19
5	$d_{(1,13)}=0,25$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,10,11,12,15,(16,17),18,19
6	$d_{(9,11)}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14),7,8,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
7	$d_{(6,14),8}=1,0012$	(1,13),(4,20,2),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),18,19
8	$d_{(4,20,2),18}=1,0121$	(1,13),(4,20,2,18),3,5,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
9	$d_{(4,20,2,18),5}=1,5082$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,9,(10,11),12,15,(16,17),19
10	$d_{(9,19)}=2,0006$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8),7,(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
11	$d_{(6,14,8),7}=2,505$	(1,13),(4,20,2,18,5),3,(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
12	$d_{(1,13),3}=3,0061$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19),(10,11),12,15,(16,17)
13	$d_{(9,19),(10,11)}=4,5012$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19,10,11),12,15,(16,17)
14	$d_{(16,17),15}=5,0034$	(1,13,3),(4,20,2,18,5),(6,14,8,7),(9,19,10,11),12,(16,17,15)
15	$d_{(4,20,2,18,5),(6,14,8,7)}=8,001$	(1,13,3),(4,20,2,18,5,6,14,8,7),(9,19,10,11),12,(16,17,15)
16	$d_{(1,13,3),(16,17,15)}=11,5011$	(1,13,3,16,17,15),(4,20,2,18,5,6,14,8,7),(9,19,10,11),12,
17	$d_{(4,20,2,18,5,6,14,8,7),(9,19,10,11)}=18,5164$	(1,13,3,16,17,15),(4,20,2,18,5,6,14,8,7,9,19,10,11),12,