Humanística e Teologia, 2006, 27, 117-125

O espaço entre os números: pela filosofia da geometria *

Introdução

A Matemática pura estuda entes de razão, isto é, a "quantidade pura", abstracta, da análise geométrica, algébrica e transcendente. A geometria é um ramo da matemática que se refere como "quantidade espacial".

A segunda espécie da "quantidade" é a "espacial" como extensão pura para n-dimensões. O espaço euclidiano tem três dimensões, sendo limitado por planos. O plano é limitado por rectas e as rectas por pontos. Daqui surgem vários conceitos geométricos de Ponto, Recta e Plano.

Mas, pelas extensões sucessivas, existem várias espécies de espaços: puros, analíticos, topológicos, etc.

O Espaço (E) difere do "número". Contudo, a construção da Geometria Analítica, bem como a Geometria Diferencial, vieram mostrar que toda a análise da "quantidade" se pode fundar na teoria geral dos conjuntos. [1]

Todavia, a teoria dos conjuntos (ou classes) está na base da análise matemática moderna, bem como nas novas leituras geométricas, como a Topologia, que necessita da noção de "conjunto", originando novas extensões.

---

* *In memoriam* do P.re Vitorino Mendes de Sousa Alves, Professor Catedrático da Faculdade de Filosofia de Braga, da U.C.P., falecido a 08/01/2002, de quem fui assistente estagiário, entre 1974 e 1976.

[1] Cf. V. M. DE SOUSA ALVES, *Ensaio de Filosofia das Ciências*, Braga, Publicações da Faculdade de Filosofia, 1998, 447; Cf. A. MANNHEIM, *Cours de Geométrie Descriptive*, Paris, Gauthier-Villars, 1886, 158-164.

Poderemos dizer que a fundamentação lógica das generalizações da geometria assenta na teoria das classes (conjuntos).

A Geometria é o ramo da Matemática que estuda as formas espaciais, suas estruturas, relações operativas e propriedades. Mas, existem variados graus de Espaço por causa das extensões da Análise: espaço euclidiano, não-euclidiano, espaço de Hilbert, espaço diferencial e topológico. Como a Topologia necessita da operação de "passagem ao limite", poderá auferir-se que a Análise Matemática emprestou elementos formais e operativos (funções, variáveis, etc).

Por aqui vamos encontrar diferentes espécies de Geometria, que se poderão classificar pela teoria dos conjuntos ou pela teoria dos grupos.

A Geometria pura (espacial) estuda os espaços, como entidades métricas dimensivas (figurativas). Esta apresenta duas generalizações, ora como métrica (euclidiana e não-euclidiana) e projectiva ou sintética, ora como geometria descritiva.

A Geometria Analítica estuda os Espaços Analíticos pelo sistema dos números reais: Pi (xi). Trata-se, pois, de novo método para tratar a Geometria em linguagem simbólica. Esta nova extensão geométrica apresenta-se sob duas formas, quer a "clássica" (que se afirma pelos espaços cartesianos e hiperespaços), quer a "moderna" (pelos espaços abstractos à Fréchet). Não poderemos esquecer que a Geometria Diferencial foi iniciada por Riemann (1826-1866) ao observar que o teorema de Pitágoras poderia ser generalizado, definindo novo comprimento pela noção de geodésica.

Uma das mais notáveis generalizações encontra-se representada pela Topologia, que se caracteriza por estudar figuras qualitativas pelos conceitos de limite e vizinhança.[2]

Finalmente, surge a fundamentação filosófica da Geometria, que vai desde a determinação do valor e limites (epistemologia) até à fundamentação ontológica.

1. Fundamentos filosóficos do "espaço métrico"

A Geometria, ramo da Matemática, como expressão espacial, funda-se "a si mesma", dado que os seus axiomas, num sistema formal, devem ser evidentes *per se*.

[2] Cf. J. VUILLEMIN, *Leçons sur la Première Philosophie de Russell*, Paris, Armand Colin, 1968, 282-289.

Da mesma forma, a Matemática, *sub specie*, encontra-se na "Geometria", como valor e limites da mesma e o seu objecto formal já não obedece à definição intuitiva e clássica da ciência da categoria da quantidade abstracta, mas exige, ainda, a nova categoria da relação (*esse ad*).

A construção de qualquer sistema formal e generalizado, como aparece na "geometria", determina o conteúdo de uma relação intuitiva, porque toda a ciência é um – *fieri* – em alternância de fases analíticas e sintéticas. Se a Matemática se apresentasse, simplesmente, como síntese de relações lógicas, então não seria possível a Física Teórica.[3]

1.1. Valor e limites dos espaços geométricos

Bourbaki pensava que a ciência matemática, incluindo a Geometria, é uma "construção" por meio da análise das estruturas fundamentais. É uma "construção" que vai do "simples" (geometria euclidiana) para o "complexo" (geometria geodésica).

Segundo a gnoseologia regional, aquilo que caracteriza o espaço geométrico não são os seus elementos isolados, mas a "estrutura" ou a relação que emerge dialecticamente entre eles.

Segundo o valor e limites da Geometria, não se podem reduzir as figuras, relações e teoremas da Geometria e Topologia a simples equações algébricas ou diferenciais (só pela relação de igualdade).

Segundo a leitura gnoseológica, a Matemática, pela Geometria, só se poderá aplicar à física teórica dos entes reais: numeráveis e dimensionais. A Geometria mostra, pelos espaços e dimensões, a lógica da "figura espacial", aquilo que as proposições da lógica mostram nas "tautologias".

Uma das características fundamentais da "geometria", no domínio lógico, está em referenciar-se como "modelo" de construção espacial a n-dimensões, para corporizar teorias físicas, desde a Mecânica Racional até à Relatividade Generalizada, passando pela Restrita.[4]

Apesar dos sistemas matemáticos serem múltiplos, contribuindo para a fragmentação do conhecimento, possuem, entretanto, um "nexo geométrico comum". Cada um dos sistemas matemáticos incorpora algum

[3] Cf. A. GEORGE; D. J. VELLEMAN, *Philosophy of Mathematic*, Oxford, Blackwell Publishers, 2002, 1-13.

[4] Cf. L. GOLOVINA, *Álgebra Lineal y algunas de sus aplicaciones*, tradução do russo, Moscú, Mir, 1974, 202-224.

aspecto da Geometria. Eles constituem um sistema redundante de múltiplas representações, para conceitos geométricos, os quais são essenciais em Física.

Mas, variados são os limites da Geometria, nomeadamente da Geometria Analítica, que determinam uma fundamentação dimensional para a Mecânica Clássica. É, porém, insuficiente para a Relatividade Geral, que só se definiu matematicamente pela geometria diferencial e pelos tensores. [5]

1.2. Essência e Existência dos espaços métricos

O *status quaestionis* da Ontologia Regional da Geometria implica, além de referenciar a essência dos entes, saber o *esse* (existência) dos entes conjuntos da Geometria. São ideais ou reais? Qual a sua constituição ontológica?

Assim surge uma preocupação ontológica, que é marcada por um sentido e evolução acto-potencial de pontos, rectas, planos e esferas ou entidades poligonais. Há uma resposta ontológica para a "geometria".

Aqui poderão surgir as exigências da essência dos diferentes "espaços"; que dominam a Geometria e que se definem pela teoria do acto e da potência e pela teoria dos transfinitos de Cantor.

O Espaço euclidiano (E_3) é um conjunto transfinito de planos, em potência. O E_2 (plano) é um conjunto transfinito de rectas em potência. A recta (E_1) será um conjunto transfinito de pontos em potência. O ponto (E_0) é um conjunto unitário de 0-elementos, que só existe como estrutura potencial da recta ou limite do infinitésimo linear: $\lim_{n \to \infty} E_n = 0$. [6]

Os referidos espaços, também, poderão marcar a sua "essência" pela teoria dos limites: um espaço a n-dimensões é o limite do espaço a n+1 dimensões.

O plano aparece como limite do espaço a n-dimensões. A "recta" será o limite do plano /E_2/e o ponto /E_0/ será o limite da recta /E_1/. E o limite do ponto? Não existe, dado que é "adimensional". Será, pois, um conceito

[5] Cf. D. HESTENES, "Reforming the mathematical language of physics", in: *American Journal of Physics*, 71 (2003), 106.

[6] Cf. B. DE JESUS CARAÇA, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Lisboa, Tipografia Matemática, 1958, 317-318.

"limite" (indefinível). Os elementos ou partes do espaço geométrico existem só em potência, não em acto. Quando os matemáticos dizem que o espaço é um conjunto infinito actual de pontos, não definem a essência pura do Espaço como um ser. Referem-se à estrutura pontual a que se poderá reduzir o Espaço por uma sucessão de operações ideais da Análise Matemática. Segundo a operação de passagem ao limite: E_3 = número infinito de planos E_2. Se E_2 = número infinito de rectas E_1, então E_1 = número infinito de pontos E_0. Logo, E_3 será um número infinito de pontos E_0.

O E_3 euclidiano será estrutura de ordem a 3-dimensões, mas de curvatura nula. Logo, é válido o 5º postulado das duas paralelas, que fundamenta a Geometria parabólica de Euclides.

O Espaço lobatschevskiano é uma estrutura a 2-dimensões, mas de "curvatura negativa". Logo, é válido o 5º postulado de um número infinito de paralelas, que fundamenta a nova Geometria hiperbólica, que se aplica em regiões infinitésimas. Os espaços riemannianos são estruturas a n-dimensões, mas de curvatura positiva. Logo, será válido o 5º postulado de zero-paralelas, que funda, por sua vez, as novas geometrias: elíptica e esférica. Estas aplicam-se nas regiões infinitamente grandes. O hiperespaço é um espaço a n-dimensões, que tem sentido em Cosmologia Científica. [7]

Com efeito, o espaço analítico é um conjunto de quaisquer elementos $\{x, y, z, \ldots\}$, o qual se define numa função numérica de (x, y,) ou vectorial $\mathtt{l}(\vec{x}, \vec{y})$. [8]

Traduzem-se, por correspondência, os E_n de pontos pelo sistema de números reais, funções, distâncias, etc. O mesmo diz-se "métrico" (R, d) ou vectorial (R, $\mathtt{l}$), se a função for a distância entre dois pontos P_1 e P_2 ou a dimensão vectorial $\mathtt{l}$

Além dos referidos espaços métricos, existem os espaços cartesianos, onde cada ponto P = (x, y, z) surge como recta ou curva, que se representam por equações ou funções a n-variáveis. Há os espaços vectoriais onde cada ponto será $P = (\vec{u}, \vec{v}, \ldots)$ ou $(\vec{v}, t)$. Temos espaços de configuração, onde cada volume é diferencial: $dV_i = (x_i, y_i, z_i)$. E o espaço abstracto à Fréchet abstrai-se da natureza dos elementos com pontos que poderão ser: números, curvas, superfícies, funções, distâncias, séries, etc.

[7] Cf. A. I. MÁLTSEV, *Fundamentos de Álgebra Lineal*, tradução do russo, Moscú, Mir, 1976, 300.

[8] Cf. B. DE JESUS CARAÇA, *Cálculo Vectorial*, Lisboa, Tipografia Matemática, 1960, 1-4.

O espaço topológico é o par de elementos (A, H), sendo A = conjunto de pontos ou de números, e H = colecção de subconjuntos de A (pontos-vizinhança). E {A} será a base do espaço topológico e H faz a estrutura topológica. [9]

A recta real é o "espaço topológico" se associarmos ao "espaço métrico" (R, d) a estrutura H = conjunto de subconjuntos de R, sendo $E_e = E_t$, se for (R, H).

A ontologia especial da Geometria e Topologia apresenta ainda como fundamentação, descobrindo qual o outro princípio constitutivo de ser dos entes geométricos, a existência (*esse*). O ente finito da razão implica, na sua constituição ontológica, dois co-princípios: [essência + existência].

Logo, os entes-espaços, a n-dimensões, são seres de razão quantitativos, como entes-conjuntos analíticos. Mas, então, em que diferem? Analisemos a constituição ontológica do ser:

[potência + acto] → "ente finito"

ou

[essência espacial + existência lógica] → "ente de razão"

A essência é a forma espacial que define não só a categoria genérica dos entes de razão quantitativa, como também a específica: entes de razão espaciais (geométricos). Logo, existem diversos graus constitutivos, desde os espaços euclidianos até aos espaços topológicos.

O tipo transcendental (grau analógico) de ser é a nota semelhante de "ser-ideal", somente predicável dos entes quantitativos de razão, que é "univoca", em sentido lógico. [10]

A verdadeira forma de perfeição abstacta encontra-se na quantidade espacial, que significa um *esse* distinto da "quantidade numérica".

Assim se poderá dizer que os conceitos da Geometria e da Topologia (E_n, E_t) são entes de razão com fundamento real. Este ente de razão é o que existe, formalmente, só no intelecto, mas pode ter fundamento psicológico e real. Tal sucede com os conceitos geométricos e topológicos de E_n e E_t, que existem, formalmente, no intelecto, mas possuem fundamento psicológico e na quantidade concreta, dada espacialmente.

Com efeito, analizando os juízos sintéticos e analíticos da Geometria e da Topologia, verificamos que os conceitos abstractos de

---

[9] Cf. M. VYGODSKE, *Aide-mémoire de Mathématiques Supérieures*, traduction du russe, Moscou, Mir, 1980, 521.

[10] Cf. R. D. BORGES DE MENESES, "Teoria do Juízo em Kant", in: *Humanística e Teologia*, 22 (2002) 220-226.

espaço a n-dimensões ou de espaço analítico são transcendentais, como categóricos e analógicos.

Ora, tais conceitos só existem formalmente no intelecto. Com efeito, as suas formas ou essências (*id quod*) transcendem a experiência ou os dados empíricos do mundo real. A recta /E_1/ é um conceito que significa uma dimensão pura e ideal. É a forma abstracta da extensão pura, que o intelecto abstrai dos entes físicos reais. Estes são limitados por planos concretos e os planos por linhas. Isto significa que, na ordem real, existem "entes extensos" a três-dimensões, que são materiais como estruturas de massa-energia. Desta sorte, o plano geométrico é a estrutura ideal e pura de rectas em potência. [11] Diremos que o fundamento psicológico, na Geometria, é a dupla forma de intuir e de conceitualizar ou de julgar. A operação intelectiva faz a síntese abstractiva do conceito, isolando a forma acidental ou a nota pura de extensão. O espaço n-dimensional, pelo juízo sintético, dá-lhe o "existir lógico" (actual) de ente. Aqui será a operação intuitiva da imaginação que actua, na síntese da imagem, pela forma potencial do Espaço, dada pelos objectos extensos de fora.

O ente de razão é todo essência e existência ao mesmo tempo. Logo, não é a forma real extraida dos corpos externos, mas a forma intencional construida pelo seu "existir" no intelecto.

Na verdade, o fundamento real é a extensão dos entes reais (a 3-dimensões) enquanto "extensos". São volumes concretos, limitados por planos, estes por linhas e estas por pontos (ex: a mesa, a bola ou esfera, o quarto vazio ou o espaço real). Mas, a síntese da percepção intuitiva do espaço não é possível sem o movimento que o gera. O fundamento último, mas radical, é o movimento de um ponto material, enquanto móvel. O ponto geométrico, em movimento, gera a "recta" e a recta gera o plano. Os entes geométricos e topológicos são conjuntos transfinitos de n-elementos que são, ao mesmo tempo, sob a razão de ser unos e múltiplos. Todavia, não podem ser tais sem a composição de dois co-princípios opostos de ser: potência e acto.

Os espaços euclidianos ($E_1 \rightarrow E_3$) são um conjunto uno, porque se realizam como um todo.

O espaço é múltiplo, porque é constituido por n-elementos realizáveis, em potência, em virtude dos planos de possíveis cortes. Pelas propriedades dos conjuntos, o espaço a n-dimensões tem a potência do inumerável, ou seja, do contínuo.

---

[11] Cf. V. M. DE SOUSA ALVES, *Ensaio de Filosofia das Ciências*, 124-125.

Ora, o contínuo implica a composição de elementos (partes), em potência, isto é, por ligações absolutas duns aos outros, sem qualquer lacuna. De contrário, os entes geométricos seriam antinómicos. As propriedades da unidade e da multiplicidade, sendo opostas, não podem radicar num só princípio simples ou homogéneo de ser. Surgem dois princípios complementares de ser, em Matemática: o da unidade e o da multiplicidade. A finitude do ente de razão geométrica (espaço métrico) também aplica a composição ôntica da potência ao acto. [12]

Conclusão

Diferentes leituras se têm feito do "espaço geométrico", que se poderão resumir nos seguintes graus analógicos do mesmo espaço:

Pelos Abstractivistas (Descartes, Leibniz e Escolásticos), o espaço geométrico referencia-se, formalmente, como ente de razão, mas com fundamento real. Significa a extensão pura abstracta a três dimensões. Assim, distinguem, *in genere et sub specie*, três níveis de espaço: o real (físico), o matemático e o imaginário (ou absoluto). Mas, alguns filósofos confundem espaço físico com o matemático e outros só analisam o espaço imaginário. Este, também, poderá ser considerado como "espaço psicológico". As teorias empiristas não explicam a forma abstracta de espaço e as suas extensões analógicas, tal como o formalismo *a priori* de Kant não descobre o fundamento objectivo da Geometria Euclidiana e nem explica como são possíveis as geometrias não-euclidianas e as novas extensões da Análise Matemática. [13] Com efeito, a solução só poderá ser dada por meio de uma teoria de tipo abstractivo.

Segundo os Idealistas (Kant, Bergson, etc), o espaço é um conceito ideal *a priori* da sensibilidade externa. Logo, em Kant, aparece como "forma pura" *a priori* da sensibilidade. Surge como modo subjectivo de intuir, pelo qual fazemos a síntese da imagem espacial, apresentando, somente, um fundamento psicológico. A Geometria recebe o seu fundamento pelos juízos sintéticos *a priori*. [14]

Segundo os Empiristas (Hume, Locke, etc), o espaço é um conceito que deriva só da experiência. Trata-se, pois, de uma propriedade real dos corpos a três-dimensões. A ideia geral de espaço não é um conceito intelectual;

[12] J. LOTZ, *Ontologia*, Romae, Pontificia Universitas Gregoriana, 1965, 15-25.

[13] Cf. C. J. POSY (edited), *Kant's Philosophy of Mathematics*, Boston, Kluvier Academic Publishers, 1992, 109-112.

[14] Cf. R. D. BORGES DE MENESES, "A Teoria do Juízo em Kant", 220-222.

mas antes apresenta-se como símbolo da imagem sintética. [15] Na verdade, Hegel ao falar do "espaço" refere-o como conceito genérico, dado na exterioridade imediata e indiferenciada da natureza, isto é, o existir "fora de si mesmo" [16].

A Geometria, nas suas diferentes formas, como expressão em enunciados sintéticos (juízos), encontrar-se-á ontologicamente, pelas novas extensões espaciais, na categoria da "relação formal extensiva" de espaço. A Geometria apresenta uma estrutura espacial, necessariamente, em sentido ontológico e reflecte um grau abstractivo da quantidade, dado que se reflecte em nova "essência quantitativa".

A primeira definição do livro I dos *Elementos de Euclides* diz que o ponto é aquilo que não tem partes, ou seja,que não pode ser dividido em partes mais pequenas. Isto estaria ligado à concepção atomista da matéria. Os átomos, para os gregos, eram as partículas indivísiveis de que a matéria seria feita. Mas, aquilo a que modernamente se chama átomo não é indivisível, porque tem mais e mais componentes, para lá dos já clássicos protão, neutrão e electrão. É, assim, inseguro fundamentar a nossa concepção de ponto, em Matemática, na realidade material e, relida a essa luz,a definição euclidiana pouco nos esclarece quanto à natureza do ponto.

Actualmente, em Geometria, reconhece-se a futilidade de definir ponto, recta ou plano. Não nos interessa a natureza desses objectos, mas sim como eles se relacionam entre si,ou seja,como se trabalha com eles.

É, como limite gnoseológico, virtualmente impossível, para muitas pessoas, imaginar um ponto, movendo-se numa configuração e ser capaz de descrever o lugar geométrico, elaborado por esse ponto no seu movimento. Contudo, as curvas clássicas aparecem segundo lugares geométricos. São estes os limites fundamentais impostos pelo sentido das Geometria Dinâmica.

Todos os matemáticos sabem bem o poder contido numa figura, muitas vezes um esboço adequado e um diagrama tornam tudo claro. Na Geometria, as figuras parecem ser essenciais em muitas descrições e demonstrações.

Com efeito, os matemáticos conhecem também o perigo de confiar em figuras.

RAMIRO DÉLIO BORGES DE MENESES
dr.ramiro@sapo.pt; ramiro.meneses@ipsn.cespu.pt

[15] G de B. ROBINSON, *The Foundations of Geometry*, Toronto, University of Toronto Press, 1963[4], 3-7.

[16] Cf. V. M. DE SOUSA ALVES, *Conhecimento Metafísico do Espaço e do Tempo*, Braga: Faculdade de Filosofia, 1959, 32-33.